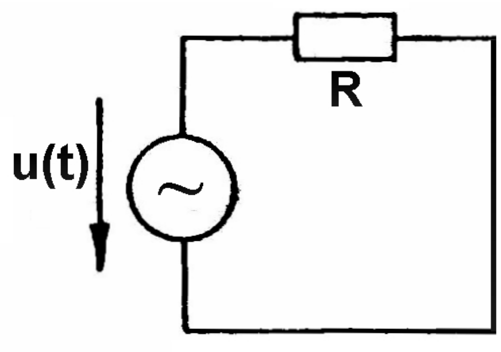
# Wechselspannung an Ohm´schem Widerstand

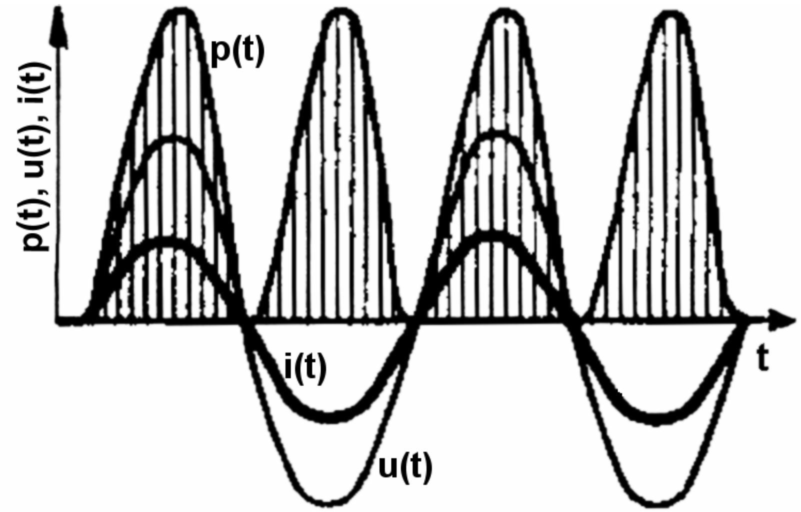



**Momentanwert der Spannung:** $u(t) = \hat{u}\,\sin\omega t$ **an R**

**Spannung und Strom an R sind in Phase:**

$$u(t) = R\,i(t) \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{1}{R}\,u(t) = \frac{\hat{u}}{R}\,\sin\omega t = \hat{i}\,\sin\omega t$$

=> $\hat{u}$: **Amplitude Spannung** $\quad \hat{i} = \frac{\hat{u}}{R}$: **Amplitude Strom**




**Momentanwert der Leistung an Ohm´schem Widerstand:**

$$p(t) = u(t)\,i(t) = \hat{u}\,\hat{i}\,\sin^2\omega t = \tfrac{1}{2}\,\hat{u}\,\hat{i}\,(1 - \cos 2\omega t) \quad \geq 0 \quad \forall \quad t$$

**Zeitlicher Mittelwert der Leistung in einer Periode T:**

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\cdot dt = \hat{u}\,\hat{i}\,\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\cdot dt$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\hat{u}\,\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}\,\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = U_{eff}\,I_{eff}$$

**Wirkleistung** $P = U_{eff}\,I_{eff}$ **erzeugt gleiche Joule´sche Wärme wie Gleichspannungsquelle mit** $U_{eff}$, $I_{eff}$

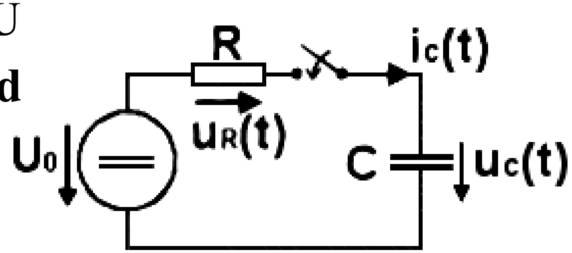
$U_{eff}$: **Effektivwert Wechselspannung** $\quad I_{eff}$: **Effektivwert Wechselstrom** $\quad$ **Anzeige DVM**

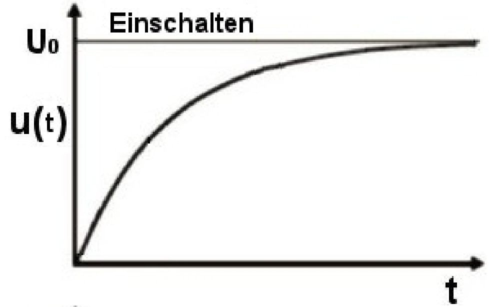
# Gleich- / Wechselspannung an Kondensator

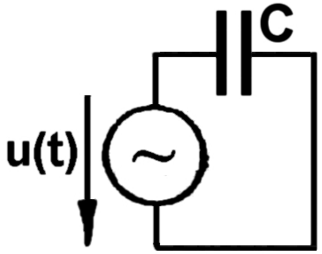
<u>Gleichspannung</u> U an Kondensator => $Q = C\,U$

=> es fließt Ladung (Strom) $[C] = {}^{As}/_{V}$ Farad

=> Es muss erst Ladung (Strom) fließen, bevor sich Spannung U an C aufbaut



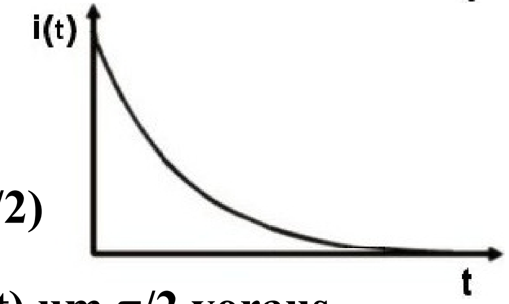




Kondensator C an <u>Wechselspannung</u> $u(t) = \hat{u}\,\sin\omega t$

=> Wechselstrom i(t), mit $i(t) = {}^{dQ}/_{dt} = C\,{}^{du}/_{dt}$

=> $i(t) = \omega\,C\,\hat{u}\,\cos\omega t = \omega\,C\hat{u}\,\sin(\omega t + \pi/2) = \hat{i}\,\sin(\omega t + \pi/2)$



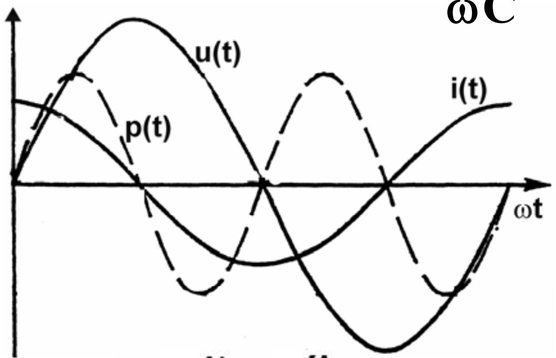

1) $u(t) = \hat{u}\,\sin\omega t$ => $i(t) = \hat{i}\sin(\omega t + \pi/2)$ Strom i(t) eilt der Spannung u(t) um $\pi/2$ voraus

2) Amplitude: $\hat{i} = \omega\,C\hat{u}$ => wie Ohm´sches Gesetz: $\hat{u} = \dfrac{1}{\omega C}\,\hat{i} = X_C\,\hat{i}$ Blindwiderstand $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

Momentanwert Leistung: $p(t) = u(t)\,i(t) = \hat{u}\,\hat{i}\,\sin\omega t\,\cos\omega t = ½\,\hat{u}\,\hat{i}\sin 2\omega t$

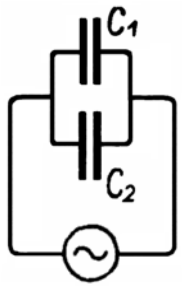
=> Leistung pendelt mit doppelter Frequenz zwischen C und Quelle

=> $P = \dfrac{1}{T}\int_0^T p(t)\cdot dt = 0$ idealer Kondensator „verbraucht" keine Leistung



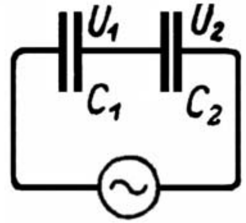

**Parallelschaltung**

$$\frac{1}{X_{Ges}} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} \Rightarrow C_{Ges} = C_1 + C_2$$

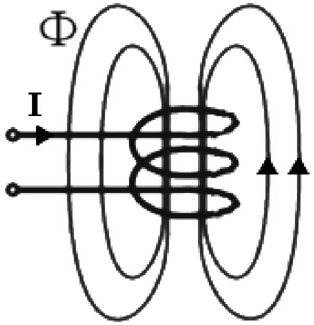



**Serienschaltung**

$$X_{Ges} = X_1 + X_2 \Rightarrow \frac{1}{C_{Ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



# Induktivität an Gleich- / Wechselspannung

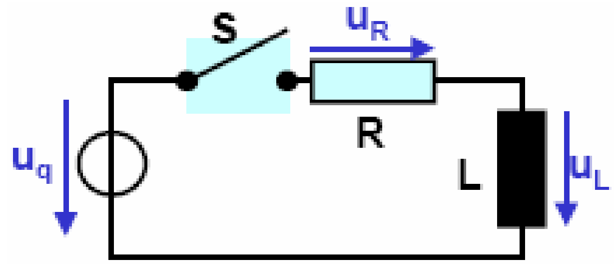


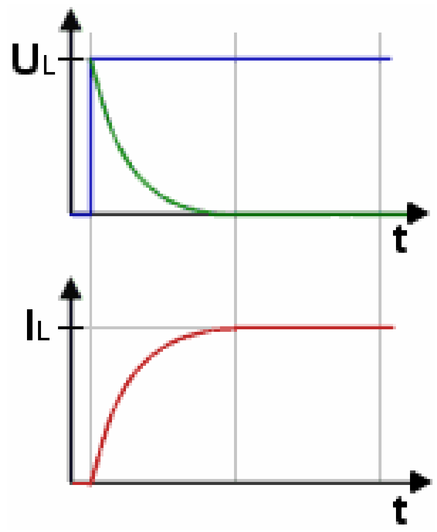

Eine von einem <u>konstanten</u> Strom durchflossene Spule erzeugt den magnetischen Fluss $\Phi$

Zeitliche Änderung des Stroms:

$$\frac{di}{dt} \xrightarrow{\text{erzeugt}} \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{d\Phi}{dt} \xrightarrow{\text{erzeugt}} u_{ind}$$




Schließen Schalter => $\frac{di}{dt}$ => $\frac{d\Phi}{dt}$ => $u_{ind}$ wirkt <u>gegen</u> Ursache (Lenz'sche Regel)

=> $u_{ind} = - L \frac{di}{dt}$ Induktivität L = f(Geometrie, Anzahl Windungen, Werkstoff...)

<u>Gegen</u> die Induktionsspannung der Spule $u_{ind}$ wirkt die Selbstinduktionsspannung $u_L$:

$u_L = - u_{ind}$ $u_L$ ist die Spannung, welche das Netzgerät aufbringen muss, damit überhaupt Strom fließt => erst liegt Spannung an der Spule, dann fließt Strom

Selbstinduktionsspannung: $u_L = L \frac{di}{dt}$

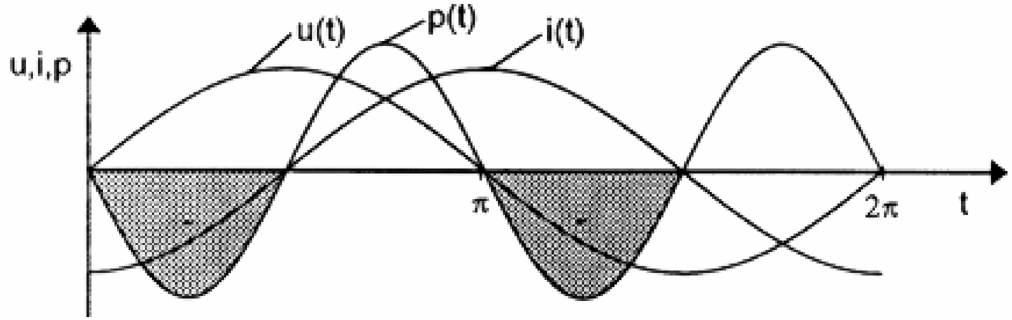
## Induktivität an Wechselspannung

Mit $i(t) = \hat{i} \sin\omega t$ folgt:

$$u(t) = L \frac{di}{dt} = \omega L \hat{i} \cos \omega t = \omega L \hat{i} \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$= X_L \hat{i} \sin(\omega t + \pi/2) = \hat{u} \sin(\omega t + \pi/2)$$

Spannung eilt Strom um $\pi/2$ voraus




$\hat{u} = X_L \hat{i}$ : Spannungsamplitude

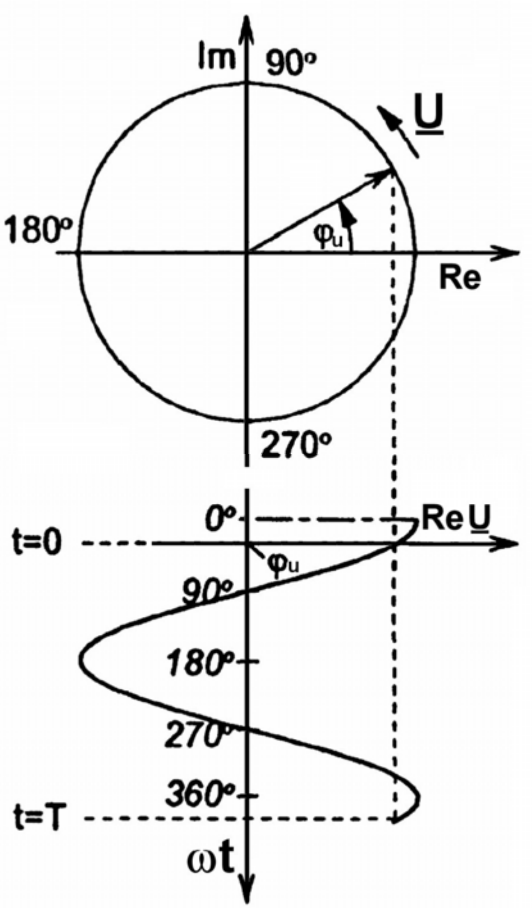
$X_L = \omega L$ : Blindwiderstand

Mit $p(t) = u(t)\, i(t) = \hat{u}\, \hat{i} \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{2} \hat{u}\, \hat{i} \sin 2\omega t$

$$=> P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t) \cdot dt = 0$$

=> An einer idealen Induktivität wird keine Leistung verbraucht

# Zeigerdarstellung




**Spannungszeiger rotiert mit Kreisfrequenz ω in komplexer Ebene:**

$$\underline{U}(t) = \hat{u}\ e^{j(\omega t + \varphi u)} = \hat{u}\ [\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)]$$

**Rechenoperationen mit komplexen Drehzeigern**

**=> Vereinfachung der Rechnung (:, ×, d/dt, ∫)**

**mit** $\underline{U} = \hat{u}\ e^{j(\omega t + \varphi u)}$ $\quad \underline{I} = \hat{i}\ e^{j(\omega t + \varphi i)}$ **zeitlicher Umlauf** $\underline{U}$, $\underline{I}$ **!!**

**Komplexer Widerstand analog Ohm´schem Gesetz:** $\underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$

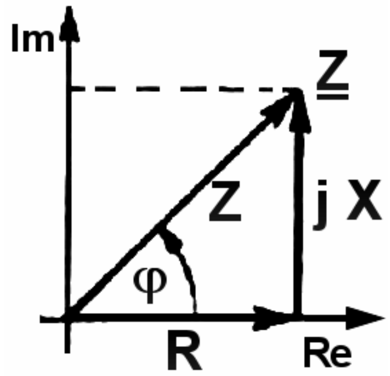
$\underline{Z} = \dfrac{\hat{u}}{\hat{i}}\ e^{j(\varphi u - \varphi i)} = Z\, e^{j\varphi}$ **φ: Phasenverschiebung Spannung - Strom**

**Scheinwiderstand** $\underline{Z}$ **komplexe Größe, <u>kein</u> zeitlicher Umlauf**

$\underline{Z} = Z\, e^{j\varphi} = Z(\cos\varphi + j \sin\varphi) = R + j\,X$

**R = Z cosφ: Wirkanteil** **X = Z sinφ: Blindanteil**

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ $\qquad \varphi = \arctan X/R$

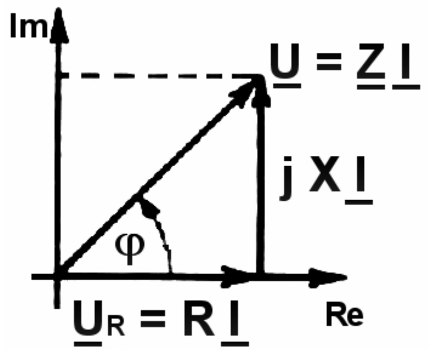



$\underline{Z}$ **verknüpft Spannung und Strom:** $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$

$=> \underline{U} = (R + j\,X)\,\underline{I} = R\,\underline{I} + j\,X\,\underline{I}$

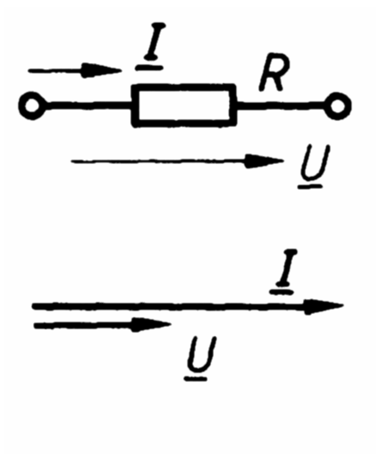
**oder:** $\underline{U} = \underline{Z}\ \underline{I}$ $=>$ $\underline{U} = Z\, e^{j\varphi}\, \underline{I} = Z\ \hat{i}\ e^{j(\omega t + \varphi)}$

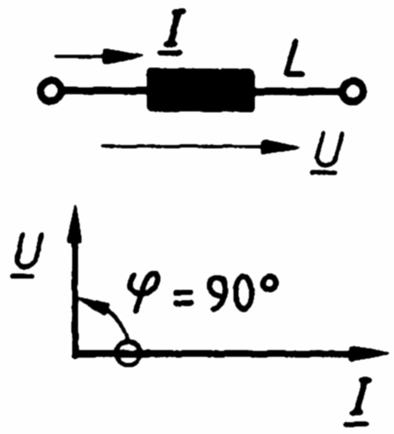
**φ: Phasenverschiebung Strom - Spannung**

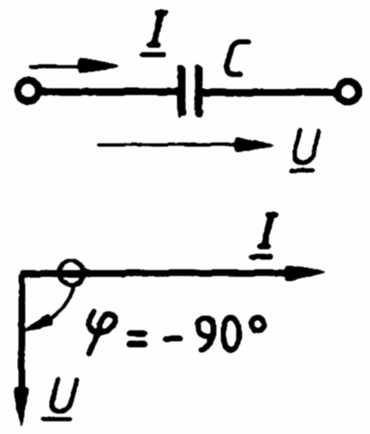



**Darstellung des Zeigers** $\underline{U}$ **zum Zeitpunkt t = 0**

# Komplexe Widerstände



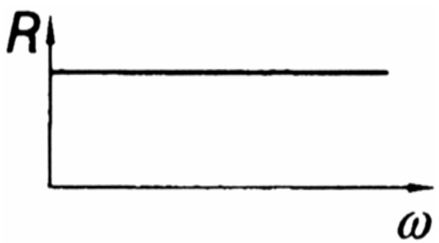

$$\underline{U} = R\,\underline{I} \qquad \underline{U} = L\,{}^{d\underline{I}}\!/_{dt} \qquad \underline{U} = {}^{1}\!/_{C}\int \underline{I}\,dt$$

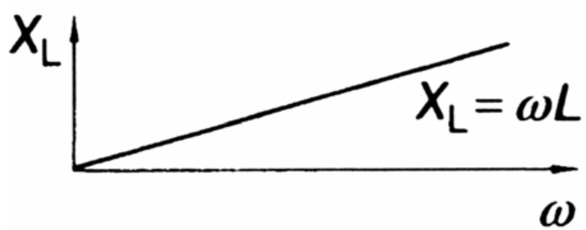
**Wähle Strom $\underline{I} = \hat{i}\ e^{j\omega t}$ auf reeller Achse als Bezugsgröße für die komplexe Darstellung**

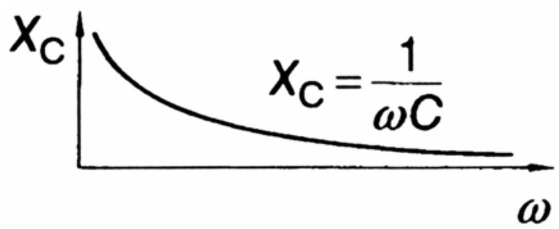
$$\underline{U} = R\cdot\underline{I} \qquad \underline{U} = j\omega L\,\hat{i}\,e^{j\omega t} = j\omega L\,\underline{I} \qquad \underline{U} = \frac{\hat{i}}{C}\int e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega C}\,\underline{I}$$

$$= -\frac{j}{\omega C}\,\underline{I}$$

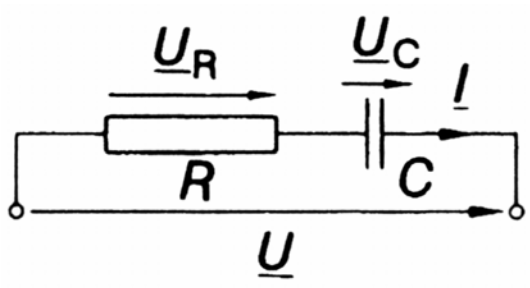
$$\underline{U} = R\,\hat{i}\,e^{j\omega t} \qquad \underline{U} = L\,\omega\,\hat{i}\ e^{j(\omega t+\pi/2)} \qquad \underline{U} = \frac{1}{\omega C}\,\hat{i}\ e^{j(\omega t-\pi/2)}$$



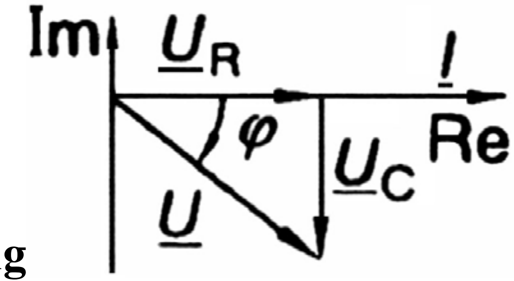
# Reihenschaltung R, C




R und C werden vom <u>gleichen</u> Strom $\underline{I}$ durchflossen

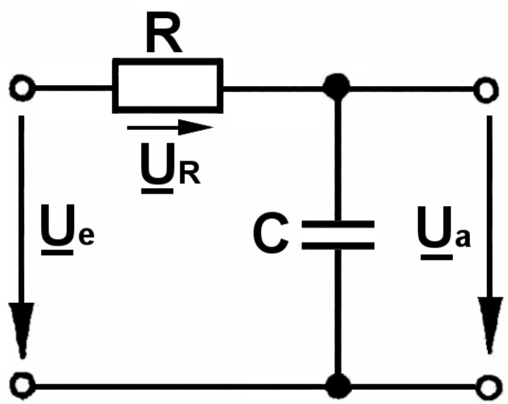
$$\Rightarrow \quad \underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U} = R\,\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I} = R\,\underline{I} - j\,\frac{1}{\omega C}\underline{I}$$




Mit $\underline{U}_R = R\,\underline{I}$ auf der reellen Achse $\Rightarrow$ $\underline{U}_C = -j\,\frac{1}{\omega C}\underline{I}$ in negativer Richtung

<u>Tiefpass</u>



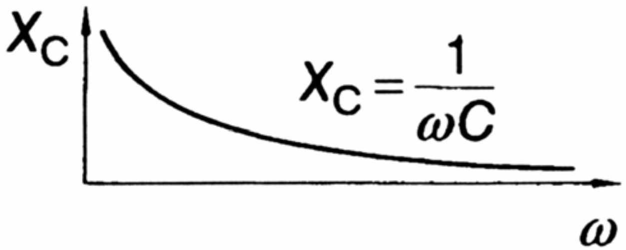

Eingang: $\underline{U}_e = \hat{u}_e\; e^{j\omega t}$ Ausgang: $\underline{U}_a = \hat{u}_a\; e^{j\omega t+\varphi}$

Gesucht sind: 1) Amplitudenfrequenzgang $\dfrac{|\underline{U}_a|}{|\underline{U}_e|} = f(\omega)$

2) Phasenfrequenzgang $\varphi = \varphi(\omega)$

Spannungsteiler, Teilspannung an C wie $X_C \propto {}^{1}\!/_{\omega C}$

d. h. $\omega\uparrow \;\Rightarrow\; |\underline{U}_a| \downarrow$




Spannungsteiler $$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{X}_C}{R + \underline{X}_C} = \frac{\dfrac{1}{j\omega C}}{R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

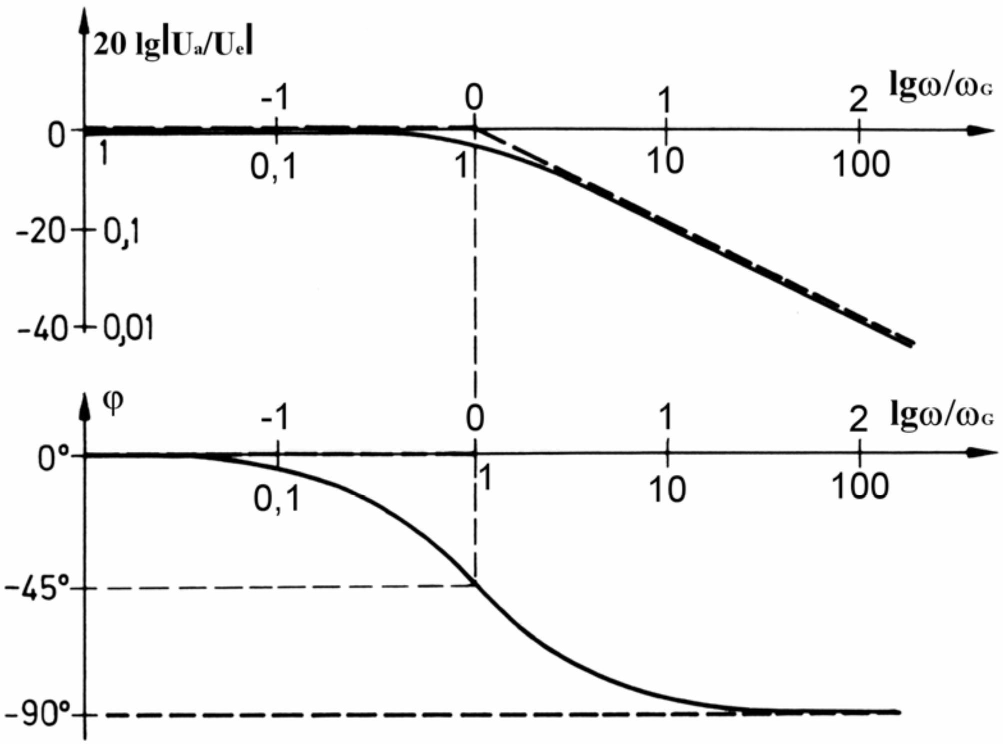
Um großen Bereich zu erfassen: Dämpfungsmaß $L = 20\,\lg \underline{U}_a / \underline{U}_e$ Angabe in Dezibel (dB)

z. B. $\underline{U}_a / \underline{U}_e = 10 \Rightarrow L = 20$ $\underline{U}_a / \underline{U}_e = 1/100 \Rightarrow L = -40$

## Tiefpass I

**Amplitudenfrequenzgang:** $\dfrac{|\underline{U}_a|}{|\underline{U}_e|} = \dfrac{1}{|1 + j\omega RC|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \quad => \quad \dfrac{|\underline{U}_a|}{|\underline{U}_e|} \to 0 \quad \text{für} \quad \omega \to \infty$

**Die Frequenz, an der gilt:** $\dfrac{|\underline{U}_a|}{|\underline{U}_e|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **heißt Grenzfrequenz $\omega_G$, mit** $\omega_G = \dfrac{1}{RC} \quad => \quad \dfrac{|\underline{U}_a|}{|\underline{U}_e|} \underset{\omega=\omega_G}{=} \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_G)^2}}$



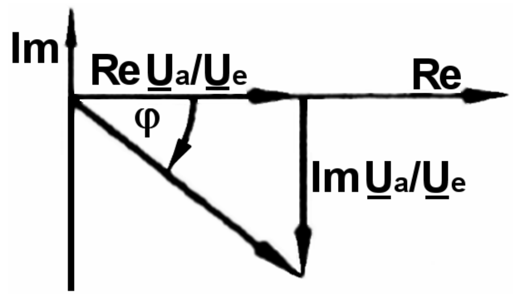

**Amplitudenfrequenzgang**

$\omega \ll \omega_G \quad => \quad \dfrac{|\underline{U}_a|}{|\underline{U}_e|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_G)^2}} \approx 1$

$=> L = 20 \lg \dfrac{|\underline{U}_a|}{|\underline{U}_e|} \approx 0$

$\omega \gg \omega_G \quad => \quad \dfrac{|\underline{U}_a|}{|\underline{U}_e|} = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_G)^2}} \approx \dfrac{1}{\omega/\omega_G} = \left(\dfrac{\omega}{\omega_G}\right)^{-1}$

$=> L = 20 \lg \dfrac{|\underline{U}_a|}{|\underline{U}_e|} \approx -20 \lg \left(\dfrac{\omega}{\omega_G}\right)$



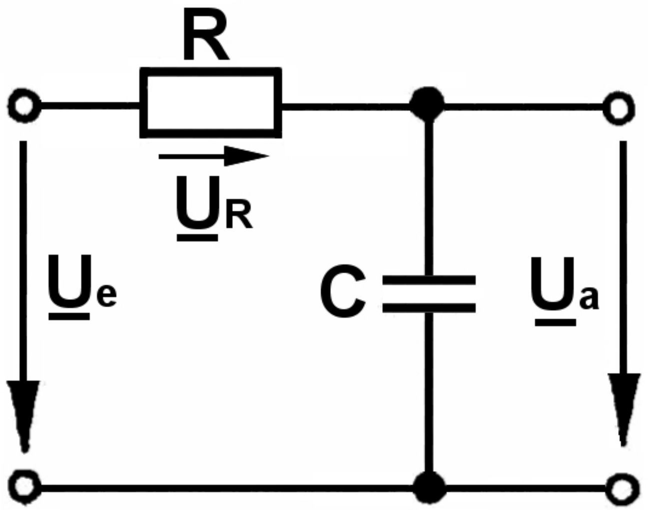

**Phasenfrequenzgang:** $\dfrac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \dfrac{1}{1 + j\omega RC} = \dfrac{1}{1+(\omega RC)^2} - j\dfrac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2}$

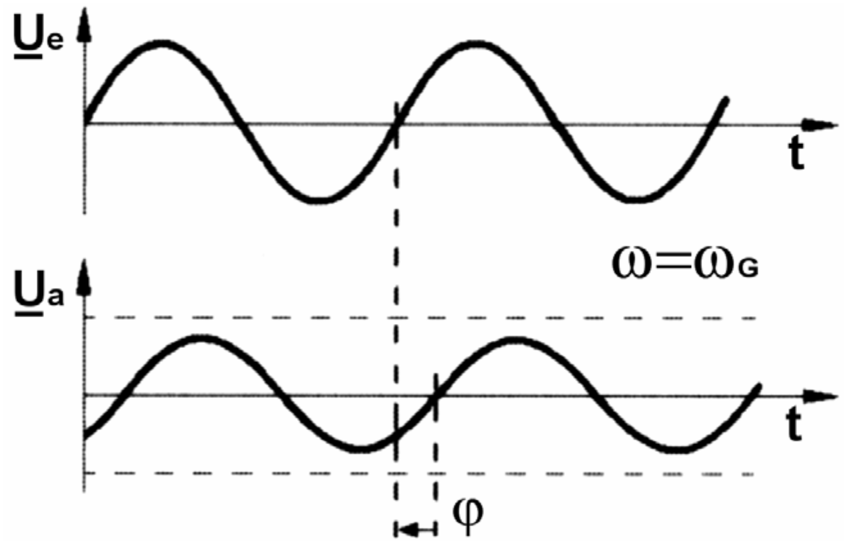
$\tan\varphi = \dfrac{\text{Im}}{\text{Re}} = -\omega R C = -\dfrac{\omega}{\omega_G} \quad => \quad$ z. B. $\omega = \omega_G \quad => \tan\varphi = -1 \quad => \quad \varphi = -45°$

# Tiefpass II

**Ergebnis:** **1) Tiefpass dämpft Frequenzen mit $\omega \geq \omega_G$ (Grenzfrequenz $\omega_G = \dfrac{1}{RC}$)**

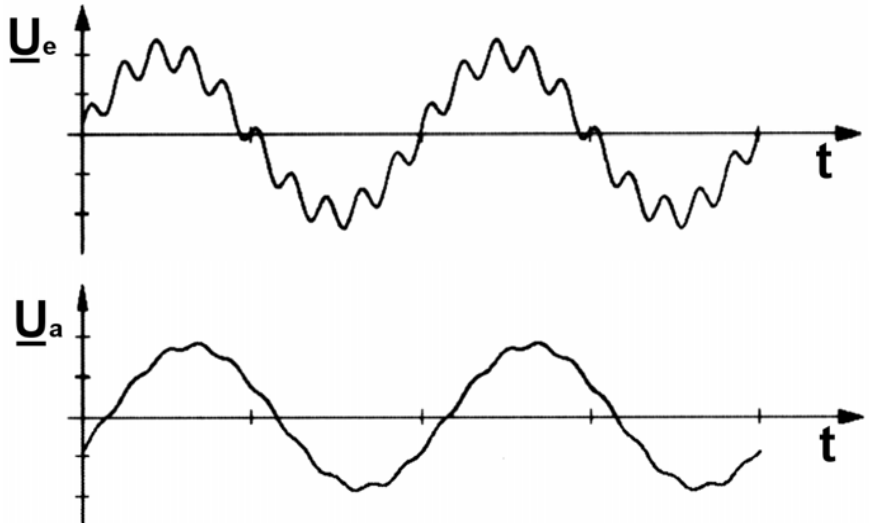
**2) negative Phasenverschiebung von $\underline{U}_a$ gegen $\underline{U}_e$**



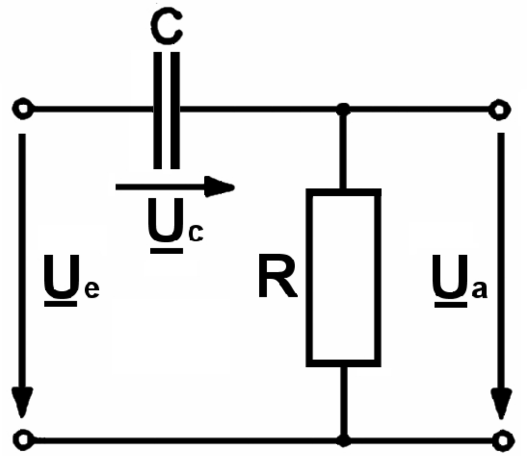

**Bei $\omega = \omega_G$:**

$$\frac{|\underline{U}_a|}{|\underline{U}_e|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$




**Praktischer Nutzen:**
**Dämpfung unerwünschter Oberschwingungen oder von Störstrahlung (hochfrequentes Rauschen) durch Tiefpass**

# Hochpass

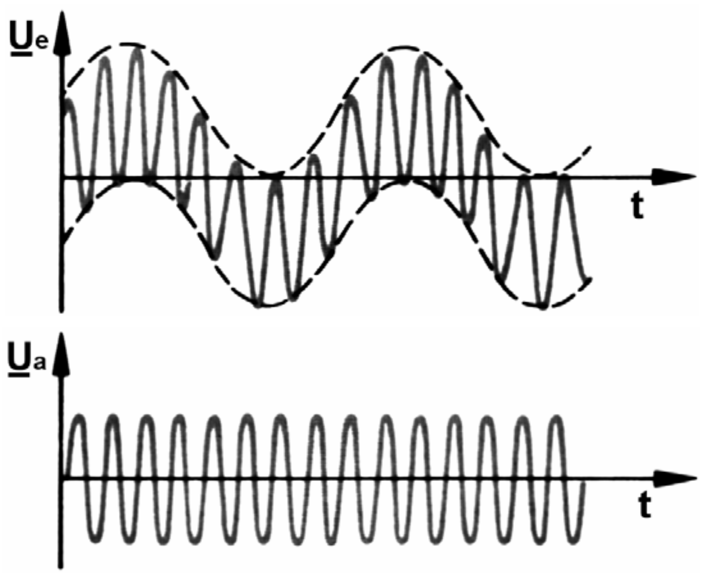



**Spannungsteiler**

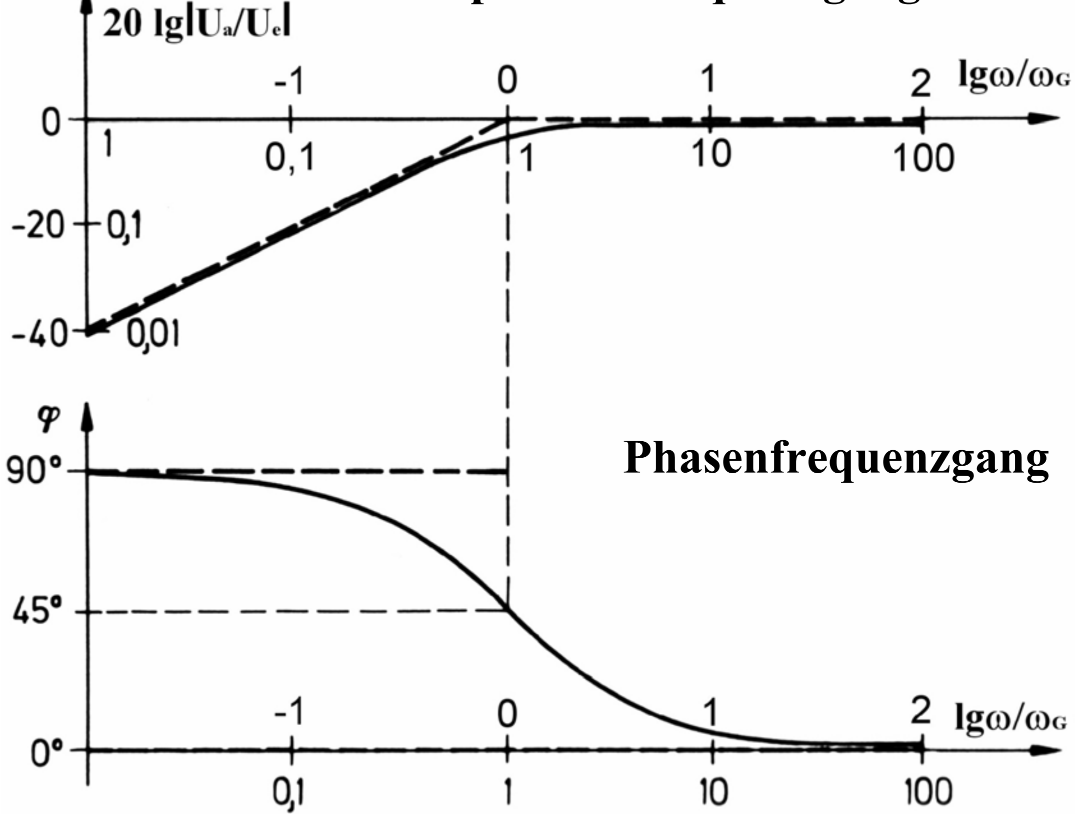
**Bei tiefen Frequenzen: Spannungsabfall an C hoch, $\underline{U}_a$ klein**

**Bei hohen Frequenzen: Kondensator wie Kurzschluss** $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

**Grenzfrequenz:** $\dfrac{|\underline{U}_a|}{|\underline{U}_e|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **für** $\omega_G = \dfrac{1}{RC}$

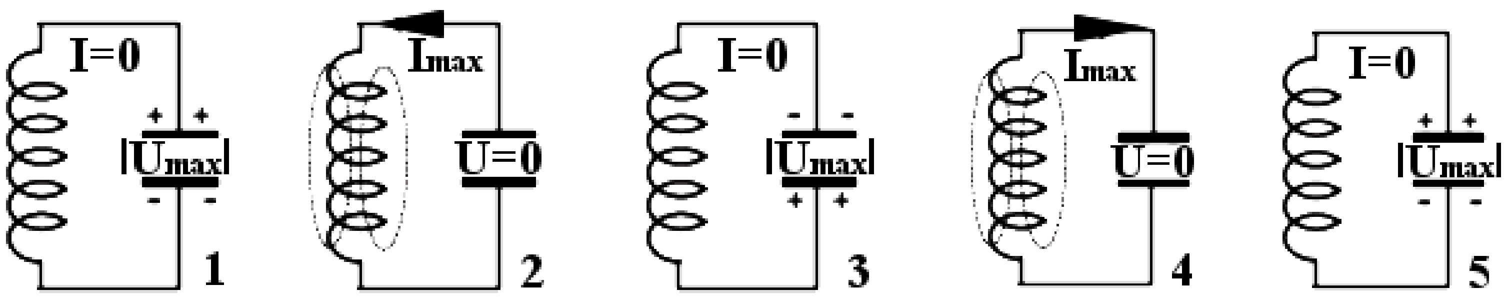



**Amplitudenfrequenzgang**

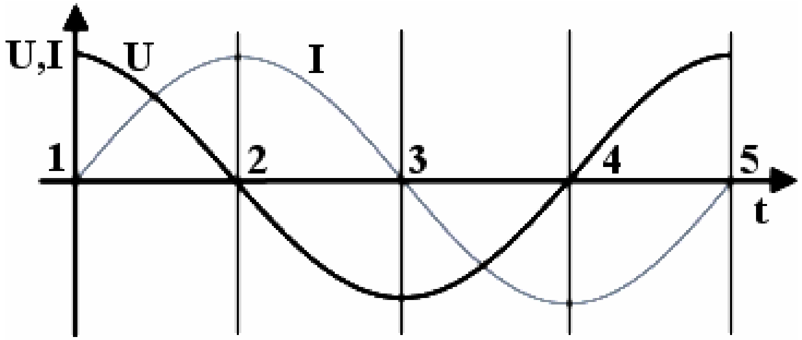



**Wirkung: Unterdrückung niedriger Frequenzen (z. B. Netzfrequenz), Aussieben hoher Frequenzen**

# Parallelschwingkreis / R, C ideal




**Ideale Bauteile**
**keine Dämpfung**




1: Kondensator mit Ladung Q => $U = U_{max}$

2: Entladung Kondensator => $I = I_{max}$ => Magnetfeld Spule

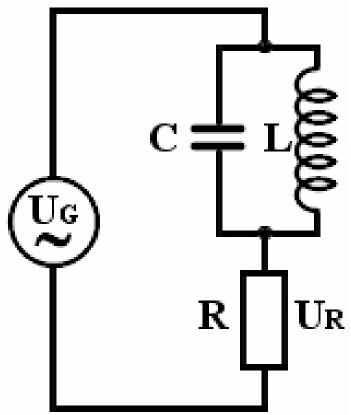
3: Abbau Magnetfeld => $I = 0$, $U = -U_{max}$

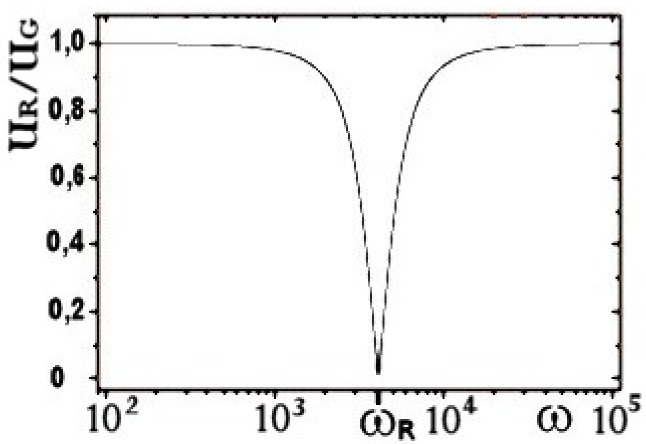
4: Entladung Kondensator => $I = -I_{max}$ => Magnetfeld Spule

5: Abbau Magnetfeld => $I = 0$, $U = U_{max}$

**Berechnung der Impedanz:** $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{X}_C} + \frac{1}{\underline{X}_L} = j\,\omega\,C + \frac{1}{j\omega L} = j\,(\omega\,C - \frac{1}{\omega L}) \Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}} = 0$ für $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

=> $\underline{Z} \rightarrow \infty$ für $\omega = \omega_R$ Resonanzfrequenz



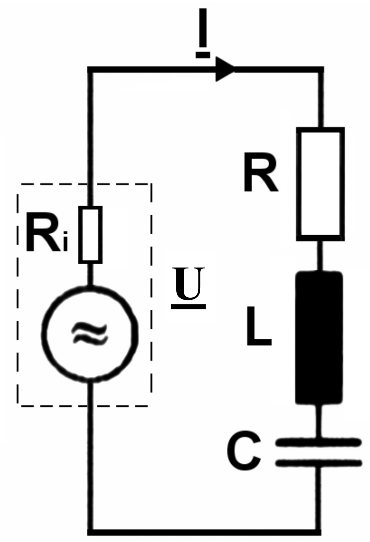

**Einsatz in der Messtechnik**

An der Resonanzfrequenz $\omega_R$ fließt kein Strom => <u>Sperrkreis</u> (z. B. gegen Netzbrumm 50 Hz)

Bestimmung Induktivität L (C bekannt) aus:

$$L = \frac{1}{\omega_R^2 C}$$

# Serienschwingkreis




**Impedanz:** $\underline{Z} = R_i + R + j\,\omega L + \frac{1}{j\omega C} = (R_i + R) + j\,(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

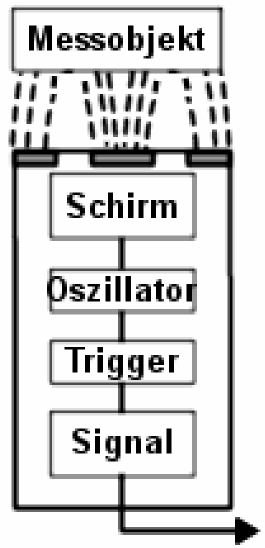
**=> im Resonanzfall mit** $\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ **gilt** $\underline{Z} = R_i + R$

**Im Resonanzkreis wirkt nur der Ohm´sche Anteil**

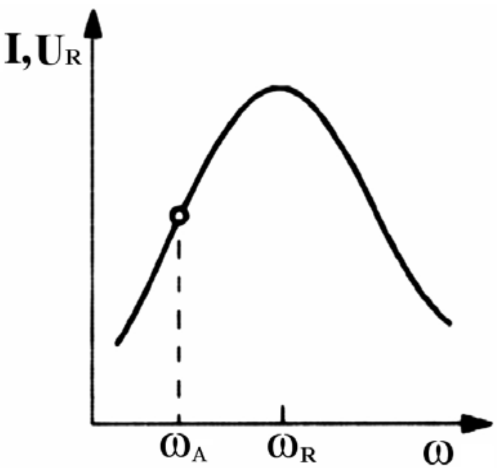
**Resonanz: Strommaximum im Kreis**

**für** $R_i \ll R$ **wird die Spannungsamplitude an R:** $\hat{U} = \hat{I}\,R$

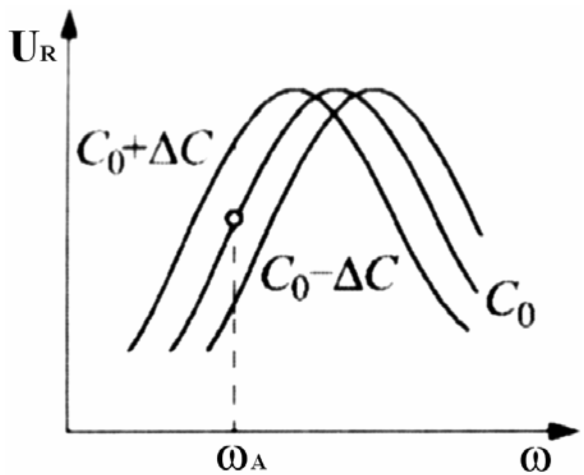
⇨ **Spannungsmaximum an R im Resonanzfall**



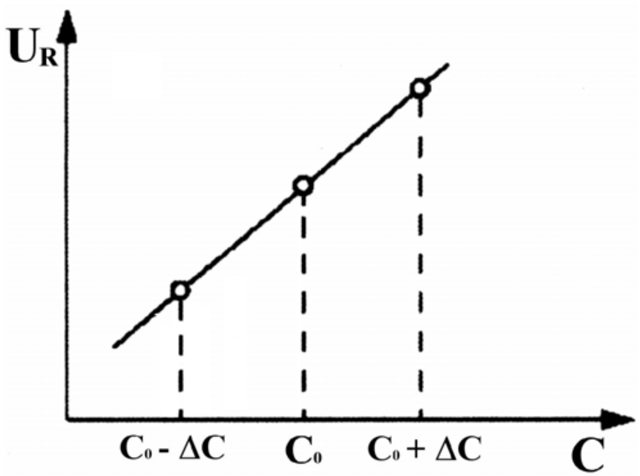

**Prinzip Näherungsschalter**




**Strommaximum bei** $\omega_R$
**Spannungsmaximum an R**
**Generatorfrequenz auf** $\omega_A$

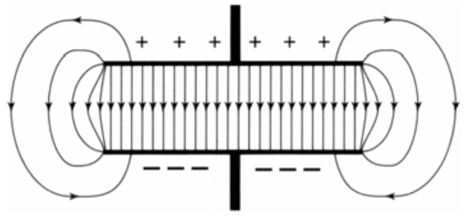



**Verändere C (F, a, Abstand...)**
**=> Resonanzkurve verschiebt sich**
**=> Messwerte** $U_R = U_R(\Delta C)$




**Lineare Abhängigkeit**
$U_R = U_R$ **(F, a, Abstand...)**

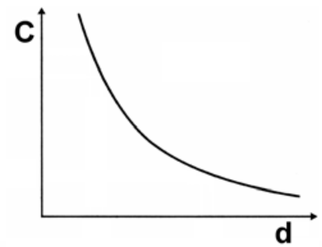
# Ausführung der Kondensatoren für die Abstandsmessung

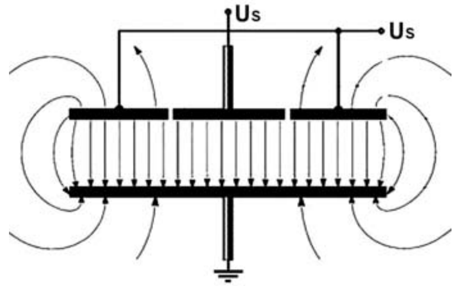


Für die Kapazität C eines Kondensators

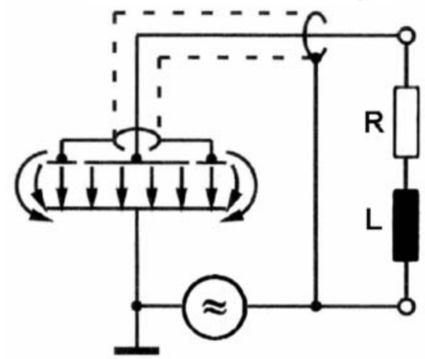
gilt bei <u>homogenem</u> Feld: $C = \varepsilon_0 \, \varepsilon_r \dfrac{A}{d}$

Feld nur für große A und kleine d homogen

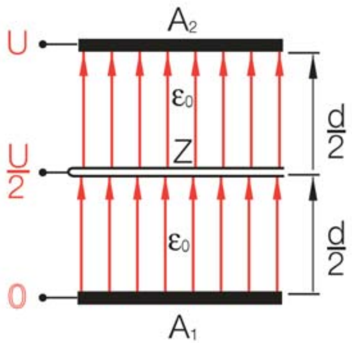


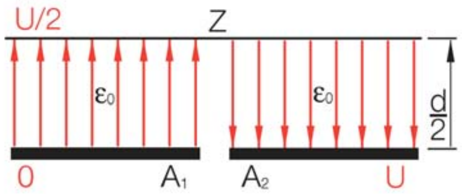

Mit <u>Schirmelektrode</u> (guard ring) wird das Messfeld homogen. Abstandsmessung nur gegen Metall möglich.
Sehr präzise Abstandsmessung (~ nm)



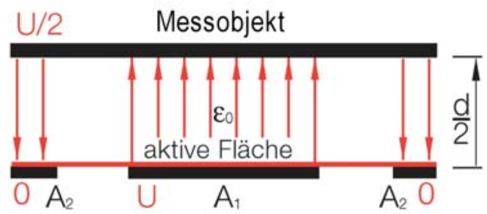

## Kapazitiver Abstandssensor für Metall- <u>und</u> Dielektrikaoberflächen (Prinzip)



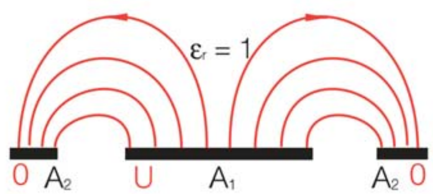

Zwischenelektrode
Metall/Dielektrikum
Zwischenelektrode U/2



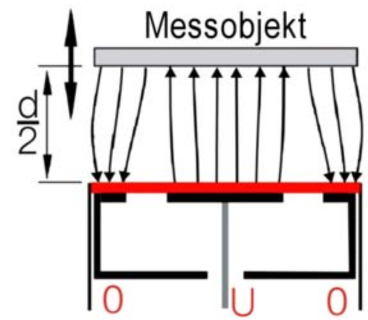

Aufklappen, das gleiche Resultat. Man beachte die Richtung der Feldlinien




Sensorausführung mit Ringelektrode für $A_2$




ohne Messobjekt




Die Feldlinien sind hier nicht so homogen wie oben
Streufelder => Abstandsmessung unpräziser
z. B. Einsatz als Näherungsschalter